RED BUILDING TEAM

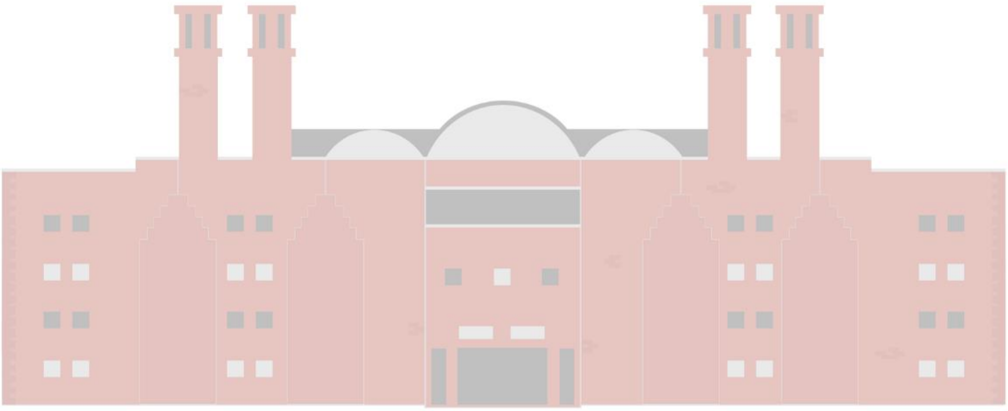
قسم هندسة الحواسيب والأتمتة

السنة الثانية / الفصل الأول

التحليل العددي

المحاضرة التاسعة

6 صفحات



الدكتور: عماد فتّاش

التاريخ: ٢٠١٤/١١/٤

السرعة، الدقّة والتميُّز

/RedBuildingTeam

لا تنسونا من دعائكم فنحنُ نحتاجه من قلوبكم ♥

مسألة الاستيفاء :

$$p_n(x) \quad ,y = f(x)\ ,\{(x_k, y_k)\}_{k=0}^{n}$$

نعطي قيمة لتابع ونبحث عن نقاط تعطي قيمة تقريبية للتابع إذا تم إعطاء قيمة ل x فإن $f(x) \approx p_n(x)$.

مسألة الاستيفاء العكسي

لتكن لدينا مجموعة النقاط $\{(x_k, y_k)\}_{k=0}^{n}$ وهنا تكون قيمة التابع y معطاة ونريد أن نوجد x التي تقابل هذه القيمة فإن x تحسب بالعلاقة الاتية:

$$\boldsymbol{x = \sum_{k=0}^{n} x_k\, L_{n,k}(y)}$$

مثال: ليكن لدينا النقاط التالية:

x_i	30	35	40	45	50
y_i	15.9	14.9	14.1	13.3	12.5

إذا كانت $y = 13.6$ ليست موجودة في الجدول فما هي قيمة الx المقابلة؟

$$x = \sum_{k=0}^{4} x_k\, L_{4,k}(y)$$

بشكل عام إن :

$$L_{4,0}(y) = \frac{(y-y_1)(y-y_2)(y-y_3)(y-y_4)}{(y_0-y_1)(y_0-y_2)(y_0-y_3)(y_0-y_4)}$$

ونحسب $L_{4,1}$ وَ $L_{4,2}$ وَ $L_{4,3}$ على نفس المنوال السابق.........

$$L_{4,4}(y) = \frac{(y-y_0)(y-y_1)(y-y_2)(y-y_3)}{(y_4-y_0)(y_4-y_1)(y_4-y_2)(y_4-y_3)}$$

فإن قيمة x تكون كما يأتي :

$$x = 30L_{4,0}(y) + 35L_{4,1}(y) + 40L_{4,2}(y) + 45L_{4,3}(y) + 50L_{4,4}(y) ......(*)$$

لا تنسوا زيارتنا على مواقع التواصل الإجتماعي

ونعوض بدل كل y بقيمتها 13.6 $x=(y=13.6)=43 \Leftarrow$

ملاحظة: في المعادلة * نعوض الـ y التي في السؤال "ليست قيمة الـ y التي في الجدول"

مثال (2): أوجد قيمة θ من أجل $f(\theta)=0.3887$ علماً أن لدينا القيم التالية.

(اذا اردنا معرفة توزيع علامات على السؤال الذي عليه 12 علامة)

θ	21	23	25
$f(\theta)$	0.3706	0.4068	0.4433

- (لاتتغير طريقة الحل بتغير الرموز.)

$$\theta=\sum_{k=0}^{2}\theta_k L_{2,k}(f(\theta)) \quad \text{(4علامات)}$$

$$\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta_0 L_{2,0}(f(\theta))+\theta_1 L_{2,1}(f(\theta))+\theta_2 L_{2,2}(f(\theta))} \quad \text{(6علامات)}$$

$$\Rightarrow \theta=22.002 \quad \text{(علامتين)}$$

مثال(3): مناقشة عامة.

ليكن لدينا المعادلة التالية الغير خطية $f(x)=4(1-x^2)-e^x=0$.

نلاحظ أن المعادلة السابقة مجزأة وكأنها مكونة من تابعين:

$$f_1(x)=f_2(x)$$

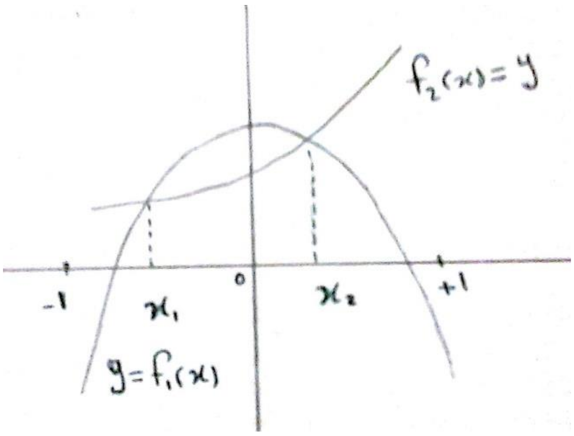
$$4(1-\mathrm{x}^2)=e^x$$

إن النقاط المشتركة بين $y_1=f_1(x)$ و $y_2=f_2(x)$ هي حلول للمعادلة $f(x)=0$

المجال الذي يتضمن الجذور :[-1,+1]

$$f(-1)=-v$$

لايوجدحل $\Leftarrow f(-1).f(1)>0 \quad \Leftarrow f(1)=-v$



- نقوم بتجريء المجال إلى مجالين: [-1,0]

$$f(-1)=-v$$

يوجد حل $\Leftarrow f(-1).f(0)<0 \quad \Leftarrow f(0)=+v$

- :[0,1]

$f(1) = -v$

$\Leftarrow f(0) = +v$ $\quad$ $f(1).f(0) < 0 \Leftarrow$ يوجد حل

إن هذا الحل السابق يكون سؤاله كالآتي :

١. استخدم طريقة تنصيف المجال في إيجاد كل من الحلول للمعادلة $f(x) = 0$ وذلك بدقة مقدارها 10^{-4}

أما اذا كان السؤال كما ياتي :

٢. استخدم طريقة نيوتن في إيجاد الحلول $x_0 = 0.5$ للجذر الموجب

$x_0 = -0.5$ للجذر السالب وبدقة 10^{-4}

نوجد الحل بالقانون التالي : $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

بما أن لدينا ال $f(x) = 4(1 - x^2) - e^x$

فإن مشتقها $f'(x) = -8x - e^x$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{4(1-x_n^2)-e^{x_n}}{-8x-e^{x_n}}$$

٣. مناقشة الحساب بطريقة التكرار و دراسة التقارب

$$f(x) = 0$$

لحل هذه المعادلة يوجد لدينا طريقتين :

١_ طريقة دالة التكرار (صيغة التكرار)

٢_ طريقة نيوتن (نيوتن رافسون _ المماسات)

أما طريقة دالة التكرار :

$$\begin{cases} x_0 \\ x_{n+1} = G(x_n) \\ n = 1,2,3,\ldots \end{cases}$$

حيث x_0 من المجال $[a.b]$

يتضمن الحل و :

$$\forall x \in [a,b]: |\acute{G}(x)| < 1$$

$$\lim_{x\to\infty} x_n = x^*$$

rbd
لا تنسوا زيارتنا على مواقع التواصل الإجتماعي

طريقة نيوتن رافسون :

$$\begin{cases} x_0 \\ x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\acute{f}(x_n)} \\ n = 1,2,3,\dots \end{cases} \qquad \lim_{n\to\infty} x_n = x^*$$

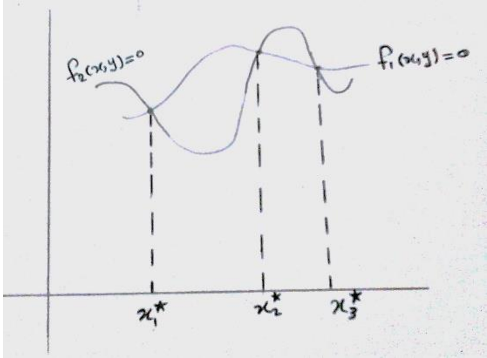
الربط بين الطريقتين:

$$x - \frac{f(x)}{\acute{f}(x)} = G(x) \quad \Rightarrow \quad x = x - \frac{f(x)}{\acute{f}(x)}, \quad x = G(x)$$

$$\acute{G}(x) = 1 - \frac{\acute{f}^2(x) - \acute{\acute{f}}(x).f(x)}{\acute{f}^2(x)} = \frac{\acute{f}^2 - \acute{f}^2 + \acute{\acute{f}}^2.f}{\acute{f}^2}$$

وبما أن $|\acute{G}(x)| < 1$ على المجال $[a,b]$ إذن $\left|\frac{\acute{\acute{f}}.f}{\acute{f}^2}\right| < 1$ وبالتالي يمكن اختيار x_0 بطريقة نيوتن في المجال السابق $[a,b]$

إيجاد حل جمل المعادلات اللاخطية:



عدد المعادلات = عدد المجاهيل

مثال : ليكن لدينا التابعين اللاخطيين f_1, f_2 أوجد الحلول :

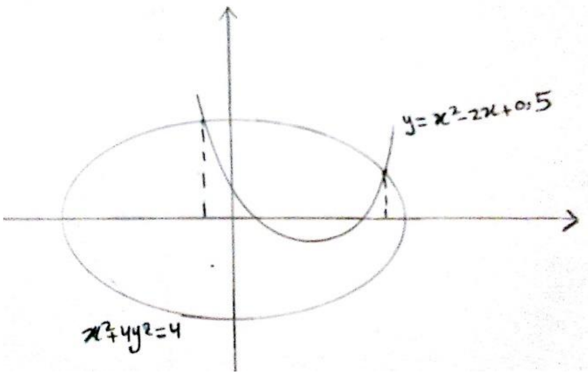
$$\begin{cases} f_1(x,y) = 0 \\ f_2(x,y) = 0 \end{cases}$$

الحل المشترك هو نقاط التقاطع بين التابعين f_1 و f_2:

$$(x_1^*, y_1^*) \ ,(x_2^*, y_2^*), (x_3^*, y_3^*)$$

عمليا ليكن لدينا المعادلتين التاليتين :

$$x^2 - 2x - y + 0.5 = f_1(x,y) = 0$$
$$x^2 + 4y^2 - 4 = f_2(x,y) = 0$$



لإيجاد الحل المشترك :

لدينا نقاط قريبة من هذه الحلول :

$(-0.2 \ , 1 \ )$

$(1.9 \ ,0.3 \ )$

ما هي النقطة الثابتة :

نقول عن (p,q) إنها نقطة ثابتة ل $g_1(x,y)$ و

إذا كانت $g_2(x,y)$ $p = g_1(x,y)$ مركبة أولى و

$q = g_2(x,y)$ مركبة ثانية

إذا كان لدينا الجملة التالية : $\begin{cases} f_1(x,y) = 0 \\ f_2(x,y) = 0 \end{cases}$

فالحل هو البحث عن النقطة الثابتة :

والتي نقوم باستنتاجها من ١ و٢ وذلك إما بعزل x و y

$$\begin{cases} f_1(x,y) = 0 \Rightarrow x = g_1(x,y) \\ f_2(x,y) = 0 \Rightarrow y = g_2(x,y) \end{cases}$$

إذن $\Leftarrow$ $g_1(x,y)$ هي دالة تكرار بالنسبة ل x

$g_2(x,y)$ هي دالة تكرار بالنسبة ل y

ملاحظة : لو كان لدينا ثلاث نقاط نأخذ الـ x من المعادلة الأولى والـ y من المعادلة الثانية والـ z من الثالثة

$$\{ (x_k, y_k)\}_{k=0}^{\infty}$$

$$\lim_{n\to\infty} (x_n, y_n) = (x^*, y^*)$$

(x_0, y_0) نقطة ثابتة معطاة

$$\begin{cases} x_{n+1} = g_1(x_n, y_n) \\ y_{n+1} = g_2(x_n, y_n) \\ n = 0,1,2,\dots \end{cases}$$

$$x_1 = g_1(x_0, y_0), \quad y_1 = g_2(x_0, y_0)$$

$$x_2 = g_1(x_1, y_1), \quad y_2 = g_2(x_1, y_1)$$

وهكذا

نعود للمثال السابق:

ليكن لدينا المعادلتين السابقتين $\begin{cases} x^2 - 2x - y + 0.5 = 0 \\ x^2 + 4y^2 - 4 = 0 \end{cases}$

المعادلة الأولى : $x = \frac{x^2 - y + 0,5}{2} = g_1(x,y)$

المعادلة الثانية : نضيف $-8y$ للطرفين كقيمة افتراضية (عشوائية)

$$y = \frac{(-x^2 - 4y^2 + 8y + 4\,)}{8} = g_2(x\,,y)$$

$$\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{x_n^2 - y_n + 0,5}{2} \\ y_{n+1} = \dfrac{(-x_n^2 - 4y_n^2 + 8y_n + 4\,)}{8} \\ n = 0,1,2,\dots \end{cases}$$

لا تنسوا زيارتنا على مواقع التواصل الإجتماعي

إذا قمنا بفرض قيمتين مختلفتين للنقطة (x_0, y_0) فنحن أمام حالتين :

الحالة الأولى

n	x_n	y_n
0	$x_0 = 0.00$	$y_0 = 1.00$
1	$x_1 = 0.25$	$y_1 = 1.00$
2	-0.21875	0.9921875
⋮		
7		
⋮		
9	-0.2222146	0.9938084

تقارب $\lim_{n\to\infty}(x_n . y_n) = (x^*, y^*)$

الحالة الثانية

x_n	y_n
$x_0 = 2.00$	$y_0 = 0.00$
2.5	0.00
2.78	-0.1328
⋮	
512263.2	-20547.82
⋮	

تباعد الحل

ونحسب هذه القيم من القانونين التاليين :

$$x_1 = \frac{x_0^2 - y_0 + 0{,}5}{2} = -0.25 \ , \qquad y_1 = \frac{(-x_0^2 - 4y_0^2 + 8y_0 + 4\ )}{8} = 1$$

تصحيح من المحاضرة السابعة : الصفحة ٣ السطر ٦

$$x_{n+1} = G(x_n)$$

المحاضرة الثامنة (العملي) : الصفحة الأخيرة السطر ٣

$$\ln y = \ln a + bx$$

Brighter
Future
Begins Today